 Posted: 24 December, 2004
Makalah Pribadi Falsafah Sains (PPS 702)
Sekolah Pasca Sarjana / S3
Institut Pertanian Bogor
Desember 2004

Dosen:
Prof Dr Ir Rudy C Tarumingkeng, M F (Penanggung Jawab)
Prof. Dr. Ir. Zahrial Coto, M.Sc
Dr. Ir. Hardjanto, M.S

PENYEDERHANAAN PENYELESAIAN PERHITUNGAN DALAM MENCARI MAKSIMALISASI TERKENDALA PADA BEBERAPA MODEL EKONOMI DENGAN MENGGUNAKAN RUMUS AMS

Oleh:

A.Mubarok

A165030021/PWD

amubarok@plasa.com

PENDAHULUAN

Dalam mata kuliah Teori Ekonomi Mikro kita akan sampai pada teori perilaku konsumen dan teori perilaku produsen. Pada kedua teori ini terdapat hitungan yang cara penyelesaiannya sama yaitu menghitung kepuasan maksimum konsumen jika mengkonsumsi dua jenis barang dengan kendala anggaran dalam teori perilaku konsumen dan menghitung produksi maksimum jika menggunakan dua macam faktor produksi dengan kendala jumlah biaya dalam teori produksi. Untuk menghitung maksimalisasinya digunakan cara **Lagrange Multiplier**. Dari pengalaman penulis yang kebetulan mengasuh mata kuliah **Teori Ekonomi Mikro** di Fakultas Ekonomi Universitas Ibn Khaldun Bogor, sering perhitungan ini menjadi ganjalan bagi mahasiswa, di mana hal ini terjadi karena :

1. Panjangnya perhitungan

2. Kemungkinan terjadinya kesalahan dalam menurunkan fungsi lagrange, apalagi jika pangkatnya pecahan
3. Kemungkinan terjadinya kesalahan dalam memindahkan tanda-tanda ×, ÷, +, dan –
4. Waktu peneyelesaian soal yang relatif lama, apalagi jika soalnya bersambung
5. Kebanyakan dari mahasiswa bukan yang berlatar belakang eksakta sehingga lebih menyulitkan lagi.

Secara pribadi penulis sendiri merasakan kesulitan tersebut, namun memang begitulah adanya, seperti yang penulis temui dalam buku-buku teks.

Terdorong oleh kepedulian atas adanya kesulitan tersebut diatas penulis mencoba melakukan percobaan untuk dapat menemukan cara yang mudah untuk dipahami dan dikerjakan oleh mahasiswa. Dan ternyata Alhamdulillah berkat petunjuk-Nya, penulis menemukan penyederhanaan atau jalan cepat dalam menyelesaikan perhitungan maksimalisasi terkendala tersebut.

Selain itu ternyata rumus tersebut juga merupakan *fungsi permintaan* konsumen terhadap barang X dan Y pada berbagai tingkat harga X dan Y dengan kendala anggaran tertentu.

Persamaan dan perhitungan dengan metode Lagrange akan ditemui juga dalam teori produksi yang menerangkan tentang fungsi produksi , misalnya fungsi Coubb Douglass. Dengan demikian cara ringkas di atas dapat digunakan dalam penyelesaian soal tentang fungsi produksi Coubb Douglass, di mana :

U atau **fungsi utility** menjadi Q atau *fungsi produksi*

X dan Y atau **barang yang dikonsumsi** menjadi *K* dan *L* atau *faktor produksi*

M atau **anggaran** menjadi *TC* atau *total Cost*

Px dan Py atau **harga barang** menjadi *r* dan *i* atau *harga input*

Fungsi permintaan terhadap barang konsumsi menjadi *fungsi permintaan terhadap input*

Untuk memudahkan ingatan, jika saja rumus ini belum mempunyai nama maka penulis mencoba menamakannya dengan **Rumus AMS**.

Berangkat dari keinginan penulis dalam membantu meringankan mahasiswa, maka penulis sangat berharap agar penemuan ini dapat diterima oleh para ahlinya dan dapat disebarluaskan pemakaiannya, mengingat bahwa :

1. Dengan menggunakan rumus ini, kendala-kendala di atas relatif akan sangat berkurang
2. Waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan soal menjadi sangat singkat.
3. Jika mahasiswa lupa rumus diferensial dalam menurunkan persamaan (terutama dalam ujian) hal tersebut tidak menjadi gangguan
4. Rumusnya sangat ringkas sehingga mudah diingat

Perlu diketahui pula bahwa pengunaan notasi dalam membahas rumus ini penulis tidak menggunakan notasi seperti yang biasa digunakan oleh mahasiswa atau ahli dalam bidang eksakta, melainkan notasi-notasi yang langsung merupakan terapan, dengan tujuan untuk memudahkan mahasiswa dalam mengingat rumus.

PEMBAHASAN

1. Asumsi maksimalisasi terkendala

Dalam membahas rumus ini, perlu kiranya dibuat asumsi tertentu antara lain :

1. Fungsi tujuan adalah U (utility) atau Q (Total Produksi),
2. U atau Q merupakan fungsi dari variabel-variabel bebas yang akan dicari nilainya.
3. U atau Q merupakan perkalian dari beberapa variabel bebas yang mempunyai parameter atau pangkat tertentu tertentu
4. Terdapat kendala baik berupa anggaran dalam fungsi utility maupun biaya dalam fungsi produksi

2. Rumus AMS untuk Fungsi dengan Dua Variabel Bebas

Sengaja kami mendahulukan fungsi yang menggunakan dua variabel bebas terlebih dahulu, karena bukan saja ia percobaan awal yang kami lakukan tetapi juga untuk dapat lebih melihat kesederhanaan dari formula ini, serta merupakan model soal yang paling sering dihadapi mahasiswa.

Diketahui :

$$U = aX^{m}Y^{s}$$

Dengan kendala :

$$M = XPx + YPy$$

Di mana :

U	= Fungsi utility (kepuasan konsumen)
X dan Y	= Variabel bebas
a, m, dan s	= Konstanta / parameter (pemilihan notasi a, m, dan s hanya untuk memudahkan penulis dan mahasiswa dalam mengingat formula tersebut, notasi tersebut berasal dari huruf awal nama penulis/inisial)
M	= Kendala
Px	= Harga / nilai X
Py	= Harga / nilai Y

Maka U maksimum terjadi apabila menggunakan :

X sebesar,

$$X = \frac{mM}{Px(m+s)}$$

dan Y sebesar,

$$Y = \frac{sM}{Py(m+s)}$$

2.1. Pembuktian dan contoh penerapan rumus AMS

2.1.1. Pembuktian

Jika $U = aX^mY^s$

Kendala $M = X\ Px + Y\ Py$

Di mana :

U	= Total kepuasan konsumem
X dan Y	= Jumlah jenis barang X dan Y yang dikonsumsi
a, m, dan s	= Konstanta / parameter
M	= Anggaran yang tersedia
Px	= Harga barang X
Py	= Harga barang Y

Keseimbangan Konsumen (kepuasan maksimum) terjadi pada waktu konsumen mengkonsumsi :

$$X = \frac{mM}{Px(m+s)} \qquad Y = \frac{sM}{Py(m+s)}$$

Bukti :

$U = aX^mY^s$

$M = X\ Px + Y\ Py$ atau $X\ Px + Y\ Py - M = 0$

Maka untuk memaksimumkan X dan Y :

$$L = aX^mY^s + \lambda\ (X\ Px + Y\ Py - M) \qquad \text{..........................(1)}$$

$$\frac{\delta L}{\delta X} = a.mX^{m-1}Y^s + \lambda\ Px = 0 \qquad \text{..........................(2)}$$

$$\frac{\delta L}{\delta Y} = a.mX^{m}Y^{s-1} + \lambda\ Px = 0 \qquad \text{..........................(3)}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = XPx + YPy - M = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Persamaan (2)

$$a.mX^{m-1}Y^{s} + \lambda\, Px = 0$$

$$\lambda\, Px = -a.mX^{m-1}Y^{s}$$

$$\lambda = \frac{-a.mX^{m-1}Y^{s}}{Px} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\lambda = \frac{-a.m}{Px}.X^{m-1}Y^{s}$$

Persamaan 3

$$a.sX^{m}Y^{-1s} + \lambda\, Py = 0$$

$$\lambda\, Py = -a.sX^{m}Y^{s-1}$$

$$\lambda = \frac{-a.sX^{m}Y^{s-1}}{Py} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\lambda = \frac{-a.s}{Py}.X^{m}Y^{s-1}$$

Persamaan (5) = (6)

$$\lambda = \lambda$$

$$\frac{-a.m}{Px}.X^{m-1}Y^{s} = \frac{-a.s}{Py}.X^{m}Y^{s-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$X^{m-1}Y^{s} = \frac{Px}{-\cancel{a}.m}.\frac{-\cancel{a}.s}{Py}.X^{m}Y^{s-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$X^{m-1}Y^{s} = \frac{Px}{Py}.\frac{s}{m}X^{m}Y^{s-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Persamaan (9) dibagi dengan X^{m-1}

$$Y^{s} = \frac{Px}{Py} . \frac{s}{m} XY^{s-1} \qquad \text{.......................... (10)}$$

Persamaan (10) dibagi dengan Ys-1

$$Y = \frac{Px}{Py} . \frac{s}{m} \qquad \text{.......................... (11)}$$

Persamaan (11) disubstitusikan ke persamaan (4)

$$XPx + \frac{Px}{\cancel{Py}} \frac{s}{m} X(\cancel{Py}) - M = 0$$

$$XPx = Px \frac{s}{m} X = M \qquad \text{.......................... (12)}$$

$$XPx \left(1 + \frac{s}{m} \right) = M \qquad \text{.......................... (13)}$$

$$X = \frac{M}{Px\left(1 + \frac{s}{m} \right)} \qquad \text{..........................(14)}$$

Persamaan (14) dikalikan dengan $\frac{m}{m}$

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} X = \frac{m}{\cancel{m}} \frac{M}{Px\left(\frac{m+s}{\cancel{m}} \right)}$$

$$X = \frac{m.M}{Px(m+s)} \qquad \text{.......................... (15)}$$

Persamaan (15) disubstitusikan ke persamaan (11)

$$Y = \frac{\cancel{Px}}{Py} \frac{s}{\cancel{m}} \frac{\cancel{m}.M}{\cancel{Px}(m+s)}$$

$$Y = \frac{s.M}{Py(m+s)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

2.1.2. Contoh Penerapan

1. Jika diketahui fungsi kepuasan adalah U = $3X^2Y^3$. sedangkan anggaran yang tersedia M = Rp 10.000,- dan harga barang X adalah Rp 100,-, harga barang Y adalah Rp 200,-

   Carilah jumlah barang X dan Y yang dikonsumsi agar kepuasan maksimum !

   Jawab :

   A. *Dengan Metode Lagrange*

      $U = 3X^2Y^3$

      $M = XPx + Ypy \rightarrow 10.000 = 100X + 200Y$ atau $100X + 200Y - 10.000 = 0$

      Maka

      $$L = 3X^2Y^3 + \lambda\,(100X + 200Y - 10.000) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

      $$\frac{\delta L}{\delta X} = 6XY^3 + 100\,\lambda \qquad = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

      $$\frac{\delta L}{\delta X} = 9X^2Y^2 + 200\lambda \qquad = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

      $$\frac{\delta L}{\delta X} = 100X + 200Y - 10.000 \qquad = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Persamaan (2)

$6XY^3 + 100\lambda = 0$

$100\lambda = -6XY^3$

$$\lambda = \frac{-6}{100}XY^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Persamaan (3)

$9X^2Y^2 + 200\lambda = 0$

$200\lambda = -9X^2Y^2$

$$\lambda \quad = \frac{-9}{200} X^2 Y^2 \quad \text{..} \quad (6)$$

Persamaan (5) = (6)

$$\frac{-6}{100} XY^3 = \frac{-9}{200} X^2 Y^2 \quad \text{..} \quad (7)$$

Persamaan (7) dibagi dengan $-XY^2$

$$\frac{6}{100} Y \; = \frac{9}{200} X \quad \text{..} \quad (8)$$

1200Y = 900X ………………………………………………………… (9)

Y = ¾ X ……………………………………………………………. (10)

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (4)

100X + 200 (¾ X) – 10.000	= 0 …..…………………………… (11)
100X + 150X	= 10.000
250X	= 10.000

$$X = \frac{10.000}{250}$$

X = 40 ……………………………….…………………………….. (12)

Substitusikan persamaan (12) ke persamaan (4)

100(40) + 200Y – 10.000	= 0 ……………………………….. (13)
4000 + 200Y	= 10.000
200Y	= 10.000 – 4000
200Y	= 6000

$$Y = \frac{6.000}{200}$$

Y = 30 ……………………………..………………………….. (14)

Jadi kepuasan maksimum terjadi apabila konsumen mengkonsumsi barang

<u>X sebesar 40 dan Y sebesar 30</u>

B. Dengan Rumus AMS

Kepuasan konsumen maksimum apabila mengkonsumsi sebesar :

$$X = \frac{mM}{Px(m+s)} \quad \text{dan} \quad Y = \frac{sM}{Py(m+s)}$$

$$X = \frac{2\ (10.000)}{100\ (2+3)} \qquad Y = \frac{3\ (10.000)}{200\ (2+3)}$$

$$= \frac{20.000}{100\ (5)} \qquad = \frac{30.000}{200\ (5)}$$

$$= \frac{20.000}{500} \qquad = \frac{30.000}{1.000}$$

$$\mathbf{X = 40} \qquad \mathbf{Y = 30}$$

Jadi kepuasan maksimum terjadi apabila konsumen mengkonsumsi barang

<u>X sebesar 40 dan barang Y sebesar 30</u>

Terbukti kedua metode memperoleh hasil yang sama

2. Jika diketahui fungsi produksi Coubb Douglass adalah : $Q = 2\ K^{½}\ L^{1½}$ dan biaya yang tersedia adalah TC = Rp 600.000,- sedangkan harga Kapital sebesar r = Rp 75.000,- harga tenaga kerja adalah w = Rp 12.500,-, carilah produksi maksimumnya !

   A. Dengan Rumus AMS

   Produksi akan maksimum apabila menggunakan sebanyak :

$$K = \frac{m.TC}{r(m+s)} \quad \text{dan} \quad Y = \frac{s.TC}{w(m+s)}$$

$$K = \frac{\frac{1}{2}(600.000)}{75.000\left(\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{300.000}{75.000\ (2)}$$

$$= \frac{300.000}{150.000}$$

$$\mathbf{K = 2}$$

$$Y = \frac{1\frac{1}{2}(600.000)}{12.500\left(\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{900.000}{12.500\ (2)}$$

$$= \frac{900.000}{25.000}$$

$$\mathbf{Y = 36}$$

Jadi produksi maksimum adalah :

$$Q = 2K^{½} L^{1½}$$

$$= 2\ (2)^{½} \cdot (36)^{1½}$$

$$= 2\ (1{,}41)\ (216)$$

$Q = 609{,}12$ **dibulatkan** **<u>Q = 609</u>**

B. Dengan Metode Lagrange

$Q = 2K^{½} L^{1½}$

$TC = rK + wL$

$600.000 = 75.000K + 12.500L$ atau $75.000K + 12.500L - 600.000 = 0$

$Z = 2K^{½} L^{1½} + \lambda\ (75.000K + 12.500L - 600.000)$ …………… (1)

$\frac{\delta Z}{\delta K} = K^{-½} L^{1½} + 75.000\ \lambda = 0$ ………...……….. (2)

$\frac{\delta Z}{\delta L} = 3K^{½} L^{½} + 12.500\ \lambda = 0$ ……...………….. (3)

$\frac{\delta Z}{\delta \lambda} = 75.000K + 12.500L - 600.000 = 0$ …………………. (4)

Persamaan (2)

$K^{-½} L^{1½} + 75.000\ \lambda = 0$

$75.000\ \lambda = -\ K^{-½}\ L^{1½}$

$$\lambda = \frac{-K^{-\frac{1}{2}} L^{1\frac{1}{2}}}{75.000} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5)}$$

Persamaan (3)

$3K^{½}\ L^{½} + 12.500\ \lambda = 0$

$12.500\ \lambda = -\ 3K^{½}\ L^{½}$

$$\lambda = \frac{-3K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{12.500} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

Persamaan (5) = (6)

$$\frac{-K^{-\frac{1}{2}} L^{1\frac{1}{2}}}{75.000} = \frac{-3K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{12.500} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

Persamaan (7) dibagi $-K^{-½}\ L^{½}$

$$\frac{L}{75.000} = \frac{3K}{12.500} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

$12.500L = 225.000K$

$$L = \frac{225.000K}{12.500}$$

L = 18 K …………………….…………………………… (9)

Substitusikan persamaan (9) ke persamaan (4)

75.000 K + 12.500 (18 K) – 600.000	= 0
75.000 K + 225.000 K	= 600.000
300.000 K	= 600.000

$$K = \frac{600.000L}{300.000}$$

K = 2 ………………………………………….………….. (10)

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (4)

75.000 (2) + 12.500 L = 600.000

150.000 + 12.500 L = 600.000

12.500 L = 600.000 – 150.000

12.500 L = 450.000

L = 36 ……………………………..……………………… (11)

Jadi Q maksimum adalah :

$Q = 2K^{½} L^{1½}$

$= 2(2)^{½} (36)^{1½}$

$= 2 (1,41) (216)$

$Q = 609,12$ **dibulatkan** **<u>Q = 609</u>**

Terbukti kedua metode memperoleh hasil yang sama

3. Rumus AMS untuk Fungsi dengan Banyak Variabel Bebas

Penggunaan rumus AMS tidak terbatas pada fungsi yang mempunyai dua variabel bebas saja, tetapi juga dapat dipergunakan untuk fungsi yang mempunyai banyak variabel bebas. Kita sudah membayangkan betapa sulitnya mencari maksimalisasi suatu fungsi terkendala dengan variabel bebas yang banyak.

Tetapi dengan penggunaan formula AMS, kesulitan-kesulitan itu relatif tidak akan terjadi. Malahan sedemikian mudah dan ringkasnya sehingga dari sesuatau yang menjadi ganjalan, bisa menjadi sesuatu yang disenangi.

Baiklah kita lihat, rumus AMS untuk banyak variable tersebut, yakni jika :

Diketahui :

$$Q = m.A^aB^bC^c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N^n$$

Dengan kendala :

$$K = AP_A + BP_B + CP_C + \ldots\ldots\ldots + NP_N$$

Di mana :

Q	= Fungsi yang akan dicari maksimalisasinya
A,B,C,…,N	= Jumlah masing-masing variabel bebas yang digunakan
m,a,b,c,…,n	= Konstanta/parameter
K	= Kendala
$P_A,P_B,P_C,\ldots,P_N$	= Harga/nilai masing-masing variabel bebas

Maka Q akan maksimum apabila menggunakan sebesar :

$$A = \frac{a.K}{P_A(a+b+c+......+n)}$$

$$B = \frac{b.K}{P_B(a+b+c+......+n)}$$

$$C = \frac{c.K}{P_C(a+b+c+......+n)}$$

•

•

•

•

•

$$N = \frac{n.K}{P_N(a+b+c+......+n)}$$

Pembuktian rumus AMS untuk fungsi dengan banyak variabel bebas

Jika diketahui :

$$Q = x.A^aB^bC^c...N^n$$

Sedangkan kendala :

$$K = AP_A + BP_B + CP_C + ... + NP_N$$

Di mana:

Q	= Output
A,B,C,………,N	= Jumlah masing-masing input A,B,C sampai N yang dipergunakan dalam proses produksi
x	= konstanta
a,b,c,………,n	= Parameter masing-masing input variabel
K	= Kendala biaya
$P_A,P_B,P_C,......,P_N$	= Harga masing-masing input variabel

Maka Q maksimum bila :

$$Z \quad = x.A^aB^bC^c...Nn + \lambda\ (AP_A + BP_B + CP_C + ...+ NPN)\ ....\ (1)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta A} = x.aA^{a-1}B^bC^c......N^n + \lambda\ P_A \qquad = 0\ ....\ (2)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta B} = x.bA^aB^{b-1}C^c......\ N^n + \lambda\ P_B \qquad = 0\ ....\ (3)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta C} = x.cA^aB^bC^{c-1}......\ N^n + \lambda\ P_C \qquad = 0\ ....\ (4)$$

-
-
-
-
-

$$\frac{\delta Z}{\delta N} = x.nA^aB^bC^c......N^{n-1} + \lambda\ P_N \qquad\qquad = 0\ ....\ (5)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \lambda} = AP_A + BP_B + CP_C + \ldots\ldots + NP_N - K \qquad = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

Persamaan (2)

$x.aA^{a-1}B^bC^c\ldots\ldots N^n + \lambda\ P_A \qquad = 0$

$\lambda\ P_A \qquad = -\ x.aA^{a-1}B^bC^c\ldots\ldots N^n$

$$\lambda = \frac{-x.a}{P_A}\ .\ A^{a-1}B^bC^c\ldots\ldots N^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

Persamaan (3)

$x.bA^aB^{b-1}C^c\ldots\ldots N^n + \lambda\ P_B \qquad = 0$

$\lambda\ P_B \qquad = -\ x.bA^aB^{b-1}C^c\ldots\ldots N^n$

$$\lambda = \frac{-x.b}{P_B}\ .\ A^aB^{b-1}C^c\ldots\ldots N^n\ n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

Persamaan (4)

$x.cA^aB^bC^{c-1}\ldots\ldots N^n + \lambda\ P_C \qquad = 0$

$\lambda\ P_C \qquad = -\ x.cA^aB^bC^{c-1}\ldots\ldots N^n$

$$\lambda = \frac{-x.c}{P_C}\ .\ A^aB^bC^{c-1}\ldots\ldots N^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(9)}$$

-
-
-
-
-

Persamaan (5)

$x.nA^aB^bC^c\ldots\ldots N^{n-1} + \lambda\ P_N \qquad = 0$

$$\lambda\, P_N = -\, x.n A^a B^b C^c \ldots\ldots N^{n-1}$$

$$\lambda = \frac{-x.n}{P_N} \,.\, A^a B^b C^c \ldots\ldots N^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Persamaan (7) = (8)

$$\frac{-x.a}{P_A} \,.\, A^{a-1} B^b C^c \ldots\ldots N^n = \frac{-x.b}{P_B} \,.\, A^a B^{b-1} C^c \ldots\ldots N^n$$

$$A^{a-1} B^b C^c \ldots\ldots N^n = \frac{\cancel{-x}.b}{P_B} \,.\, \frac{P_A}{\cancel{-x}.a}\, A^a B^{b-1} C^c \ldots\ldots N^n$$

$$A^{a-1} B^b C^c \ldots\ldots N^n = \frac{b}{a}\frac{P_A}{P_B} \,.\, A^a B^{b-1} C^c \ldots\ldots N^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Persamaan (12) dibagi dengan $A^{a-1} B^{b-1} C^c \ldots\ldots N^n$

$$B = \frac{b}{a}\frac{P_A}{P_B} \,.\, A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Persamaan (7) = (9)

$$\frac{-x.a}{P_A} \,.\, A^{a-1} B^b C^c \ldots\ldots N^n = \frac{-x.c}{P_C} \,.\, A^a B^b C^{c-1} \ldots\ldots N^n$$

$$A^{a-1} B^b C^c \ldots\ldots N^n = \frac{P_A}{\cancel{-x}.a}\, \frac{\cancel{-x}.c}{P_C} \,.\, A^a B^b C^{c-1} \ldots\ldots N^n$$

$$A^{a-1} B^b C^c \ldots\ldots N^n = \frac{c}{a}\frac{P_A}{P_C} \,.\, A^a B^b C^{c-1} \ldots\ldots N^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Persamaan (14) dibagi dengan $A^{a-1} B^b C^{c-1} \ldots\ldots N^n$

$$C = \frac{c}{a}\frac{P_A}{P_C} \,.\, A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

-

Persamaan (7) = (10)

$$\frac{-x.a}{P_A} \,.\, A^{a-1}B^bC^c\ldots\ldots N^n = \frac{-x.n}{P_N} \,.\, A^aB^bC^c\ldots\ldots N^{n-1}$$

$$A^{a-1}B^bC^c\ldots\ldots N^n = \frac{P_A}{\cancel{-x}.a}\,\frac{\cancel{-x}.n}{P_N} \,.\, A^aB^bC^c\ldots\ldots N^{n-1} \ldots.. (15)$$

Persamaan (15) dibagi dengan $A^{a-1}B^bC^c\ldots\ldots N^{n-1}$

$$N = \frac{n}{a}\frac{P_A}{P_N} \,.\, A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Substitusikan persamaan (12), (14), (16) ke dalam persamaan (6)

$$AP_A + \frac{b}{a}\frac{P_A}{\cancel{P_B}} \,.\, A\,(\cancel{P_B}) + \frac{c}{a}\frac{P_A}{\cancel{P_C}} \,.\, A\,(\cancel{P_C}) + \ldots + \frac{n}{a}\frac{P_A}{\cancel{P_N}} \,.\, A\,(\cancel{P_N}) - K = 0$$

$$AP_A + \frac{b}{a} \,.\, P_A \,.\, A + \frac{c}{a} \,.\, P_A \,.\, A + \ldots\ldots + \frac{n}{a} \,.\, P_A.\, A = K$$

$$AP_A \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \ldots\ldots + \frac{n}{a}\right) = K$$

$$A = \frac{K}{P_A\left(1 + \dfrac{b+c+\ldots\ldots+n}{a}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Persamaan (17) dikalikan dengan $\frac{a}{a}$

$$A \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = \frac{a}{\cancel{a}} \cdot \frac{K}{P_A\left(1+\dfrac{b+c+......+n}{\cancel{a}}\right)}$$

$$A = \frac{a.K}{P_A(a+b+c+......+n)} \qquad \text{………………………………. (18)}$$

Substitusikan persamaan (18) ke persamaan (12)

$$B = \frac{b}{\cancel{a}}\frac{\cancel{P_A}}{P_B} \quad \frac{\cancel{a}.K}{\cancel{P_A}(a+b+c+......+n)}$$

$$B = \frac{b.K}{P_B(a+b+c+......+n)} \qquad \text{……………………………….. (19)}$$

Substitusikan persamaan (18) ke dalam persamaan (14)

$$C = \frac{c}{\cancel{a}}\frac{\cancel{P_A}}{P_C} \quad \frac{\cancel{a}.K}{\cancel{P_A}(a+b+c+......+n)}$$

$$C = \frac{c.K}{P_C(a+b+c+......+n)} \qquad \text{……………………………….. (20)}$$

•

•

•

•

•

Substitusikan Persamaan (18) ke dalam persamaan (16)

$$N = \frac{n}{\cancel{a}}\frac{\cancel{P_A}}{P_N} \quad \frac{\cancel{a}.K}{\cancel{P_A}(a+b+c+......+n)}$$

$$N = \frac{n.K}{P_N(a+b+c+......+n)} \qquad \text{………………………………. (21)}$$

dengan demikian terbukti bahwa formula AMS benar dan merupakan hasil langsung dari Lagrange Multiplier.

4. Kegunaan lain dari rumus AMS

Jika kita memperhatikan lebih seksama lagi dan kita lakukan beberapa percobaan maka akan terlihat beberapa kegunaan lain dari rumus AMS dalam menyelesaikan perhitungan, antara lain yang telah penulis teliti atau temukan :

1. Jika fungsi permintaan adalah merupakan suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara jumlah barang/input tertentu yang akan dan mampu dibeli oleh konsumen atau perusahaan pada berbagai tingkat harganya. *Ceteris paribus*

   Maka rumus AMS dalam mencari jumlah barang/input yang dapat memaksimalkan utility atau produksi adalah merupakan fungsi permintaan konsumen atau perusahaan terhadap barang/input yang bersangkutan pada berbagai tingkat harganya. *Ceteris paribus*
2. Ternyata pula bahwa dengan rumus yang sama dapat digunakan untuk menyelesaikan fungsi yang berbentuk logaritma.

   Untuk hal ini, rumus AMS dapat langsung digunakan.

   Contoh :

   Jika Q adalah fungsi produksi, $Q = m \log C + s \log L$

   Dengan kendala biaya, $TC = CP_C + LP_L$

   Di mana :

Q	= Fungsi produksi
C	= Jumlah unit kapital
L	= Jumlah unit tenaga kerja
m dan s	=Konstanta
TC	= Total biaya
P_C	= Harga kapital
P_L	= Harga tenaga kerja

Maka Q akan maksimum apabila menggunakan sebanyak :

$$C = \frac{m.TC}{P_C(m+s)} \qquad \text{dan} \qquad L = \frac{s.TC}{P_L(m+s)}$$

Bukti :

$$Z = m \log C + s \log L + \lambda\,(CP_C + L\,P_L - TC) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta C} = \frac{m}{C} + \lambda P_C \qquad = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta L} = \frac{s}{L} + \lambda P_L \qquad = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \lambda} = CP_C + LP_L - TC \qquad = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Persamaan (2)

$$\frac{m}{C} + \lambda\,P_C = 0$$

$$\lambda\,P_C = -\,\frac{m}{C}$$

$$\lambda = -\,\frac{m}{CP_C} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Persamaan (3)

$$\frac{s}{L} + \lambda\,P_L = 0$$

$$\lambda\,P_L = -\,\frac{s}{L}$$

$$\lambda = -\,\frac{s}{LP_L} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Persamaan (5) = (6)

$$- \frac{m}{CP_C} = - \frac{s}{LP_L}$$

$$L\ P_L.m = C\ P_C.s$$

$$L = \frac{P_C}{P_S}\frac{s}{m} . C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Substitusikan persamaan (7) ke dalam persamaan (4)

$$C\ P_C + \frac{P_C}{\cancel{P_L}}\frac{s}{m} . C\ (\cancel{P_L}) = TC$$

$$C\ P_C + C\ P_C \frac{s}{m} = TC$$

$$C\ P_C\ (1+ \frac{s}{m}) = TC$$

$$C = \frac{TC}{P_C\left(1+\frac{s}{m}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Persamaan (8) dikalikan dengan $\frac{m}{m}$

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} . C = \frac{m}{\cancel{m}} \frac{TC}{P_C\left(1+\frac{s}{\cancel{m}}\right)}$$

$$C = \frac{m.TC}{P_C(m+s)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Substitusikan persamaan (9) ke dalam persamaan (7)

$$L = \frac{\cancel{P_C}}{P_S}\frac{s}{\cancel{m}} \frac{\cancel{m}.TC}{\cancel{P_C}(m+s)}$$

$$L = \frac{s.TC}{P_L (m+s)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (10)$$

Terbukti

3. Dapat mempermudah dalam melakukan penelitian lanjutan .

5. Cara mengingat rumus AMS

Untuk lebih mempermudah lagi, penulis mencoba membuat cara untuk mengingat rumus AMS.

Jika fungsi yang akan dimaksimalisasi dan kendala telah diketahui maka jumlah masing-masing variabel yang memaksimalkan fungsi tersebut adalah :

$$\textit{Nilai dari variabel yang dicari} = \frac{\textit{Pangkat variabel yang bersangkutan} \times \textit{kendalanya}}{\textit{Harga variabel yang bersangkutan} \times \textit{jml semua pangkat dari variabel bebasnya}}$$

6. Kesimpulan dan Harapan

Dari pembahasan di atas yang disertai dengan contoh-contoh, maka ternyata penggunaan rumus AMS pada beberapa model tertentu akan sangat membantu, khususnya bagi para mahasiswa Fakultas Ekonomi dan umumnya siapa saja yang memerlukan.

Sehubungan dengan hal tersebut, penulis sangat berharap kiranya para ahli dapat menerima rumus ini dan kalaupun banyak kekurangan dan kesalahannya, kami mohonkan kritik dan sarannya, mudah-mudahan kami dapat segera memperbaikinya.

Akhir kata mudah-mudahan penemuan ini dapat berguna bagi setiap yang memerlukan dan menjadi amal ibadah penulis kepada Allah Yang Maha Memiliki Segala Ilmu. Aamiin……